# הגדרה

יהי שדה סדור () ותהי קבוצה

1. נקרא חסם מלעיל אם
2. נקרא חסם מלרע אם
3. חסם מלעיל M נקרא מקסימום אם
4. חסם מלרע M נקרא מינימום אם
5. חסם המלעיל הקטן ביותר (אם קיים) נקרא חסם עליון(סופרימום)
6. חסם המלרע הגדול ביותר(אם קיים) נקרא חסם תחתון(אינפימום)

# אקסיומת השלמות של

לכל אםA חסומה, כלומר קיים לה חסם מלעיל(מלרע) אז קיים לה חסם עליון(תחתון)

שדה שלם הוא שדה שבו כל קבוצה חסומה יש לה חסם עליון/תחתון

## האם רציונאלי?

נניח בשלילה ש רציונאלי. אזי קיימים שלמים p,q כך ש ונניח שזה שבר מצומצם. נעלה בריבוע: => זוגי => =>

נסתכל על ,

A חסומה מלעיל ע"י למשל 2, כי אם

אם אזי אזי

האם לA יש חסם עליון? לא, כי כל מספר שאינו יהיה מספר בינו לבין

# דוגמה

חסם מלעיל: 6

חסם מלרע: -1

חסם עליון: 5

חסם תחתון: 0

מקסימום: אין

מינימום: אין

חסם מלעיל: 6

חסם מלרע: -1

חסם עליון: 5

חסם תחתון: 0

מקסימום: אין

מינימום: 0

# קצת לוגיקה

לכל סיר יש מכסה שמתאים לו. X-סירים. Y-מכסים. אם ורק אם המכסה מתאים לסיר

*לא לכל סיר יש מכסה שמתאים לו:*

*קיים סיר כך שלא (יש מכסה שמתאים לו):*

# משפט

תהי חסומה מלעיל אזי M חסם עליון של A אם ורק אם M חסם מלעיל של A וגם לכל קיים כך ש

בעברית: אם נזיז את M אחורה ולא משנה כמה מעט יהיה איבר בקבוצה שיעקוף אותו.

# הוכחה

כיוון אחד: M חסם עליון של A ולכן בפרט הוא חסם מלעיל. צ"ל שלכל

נניח בשלילה שקיים כך שלכל מתקיים :

לכן חסם מלעיל קטן ממש מM – סתירה

כיוון שני: M חסם מלעיל. נניח בשלילה שקיים חסם מלעיל קטן ממש מ. ניקח . קטן ממש מM, לכן לכן קיים כך ש. סתירה לכך ש חסם מלעיל

# תרגיל

נתון , צ"ל חסמים.

חסם מלרע: 0. קל להראות ש

חסם מלעיל: 1:

# הערה

מקסימום הוא תמיד חסם עליון כאשר הוא קיים

## הוכחה

ברור שהמקסימום M הוא חסם מלעיל. אם אינו חסם עליון אזי יש חסם מלעיל קטן ממש ממנו כלומר אבל M מקסימום לכן ולכן סתירה לכך ש חסם מלעיל.

הראינו ש1 חסם מלעיל, אבל ולכן 1 הינו מקסימון ולכן הוא גם חסם עליון.

רוצים להראות ש0 חסם תחתון נוכיח בעזרת המשפט. צ"ל:

1. 0 חסם מלרע
2. לכל קיים כך ש

## הוכחה

1. הראנו
2. יהי . צריך למצוא כך ש, כלומר צריך למצוא כך ש

צ"ל

הערה: תכונת ארכימדס

לכל קיים כך ש

=> => קיים כך ש

# משפט

תהי חסומה מלרע אזי M חסם תחתון של A אם ורק אם M חסם מלרע של A וגם לכל קיים כך ש

# תרגיל

צ"ל חסמים

איברי הקבוצה:

נוכיח ש מקסימום. צ"ל

נעביר אגפים:

נגדיל את הצד הקטן: הצד הקטן יכול להיות -2 או 0, לכן מספיק להוכיח ש. זה נכון ל – להוכיח משם באינדוקציה. עבור n=1 ברור ש

הראינו ש חסם מלעיל. הוא שייך לקבוצה ולכן הינו מקסימום וחסם עליון.

רוצים ש-2 יהיה חסם תחתון. צריך להראות:

1. חסם מלרע
2. לכל קיים כך ש

נוכיח את 1: צ"ל ש

נגדיל את הצד הקטן(יכול להיות 0 או -2 נבחר ב0)

נכון תמיד. מש"ל

נוכיח את 2: יהי , צריך למצוא כך ש

*נחפש מבין הn האי זוגיים ולכן*

*לפי ארכימדס קל למצוא n אי זוגי כך ש ולכן סיימנו*

# שיעורי בית:

*נותר להוכיח ש ולכן אין מינימום*

## תרגיל: אי שוויון ברנולי

יהי הוכח באינדוקציה כי

נבדוק עבור : עובד עבור 1

נניח ונוכיח

לכן מותר לחלק ב:

נקטין את הצד הגדול לפי הנחת האינדוקציה:

*אם אזי => נכון*

*אם אזי*

*וגם => מש"ל*